

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по лабораторной работе

ИССЛЕДОВАНИЕ
СОБСТВЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ
ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- r - перемещение (расстояние);
 S - амплитуда виброперемещения;
 $w(x, y)$ - деформация изгиба в точке с координатами x и y ;
 u, v - продольная деформация вдоль осей x и y соответственно;
 a, b, H - длина, ширина и толщина платы (пластины) соответственно;
 h - относительная толщина платы (слоя);
 W - энергия колебаний;
 Π - потенциальная энергия;
 T - кинетическая энергия;
 ΔW - энергия, рассеиваемая за цикл колебаний;
 σ - нормальное напряжение;
 τ - касательное напряжение;
 κ - коэффициент жесткости;
 η - коэффициент механических потерь;
 ε - относительная продольная деформация;
 ω - угловая частота;
 f - частота, Гц;
 f_0 - собственная частота колебаний, Гц;
 ν - коэффициент Пуассона;
 m - масса;
 m_s - масса элементов;
 E - модуль продольной упругости;
 G - модуль сдвига;
 E', G' - динамический модуль продольной упругости
и динамический модуль сдвига;
 A - показатель использования ВП материалов в конструкции;
 $\xi_\omega(x, y), \xi_{\dot{\omega}}(x, y)$ - показатели уменьшения резонансных амплитуд,
виброперемещения и виброускорения в точке платы с координатами x и y ;
 D - цилиндрическая жесткость;
 κ_x, κ_y - волновые числа в направлении осей x и y ;
 K_i - абсолютное значение продольной жесткости i -го слоя;

k_i - относительное значение продольной жесткости i -го слоя;
 ρ_x, ρ_y - радиусы кривизны платы в направлении осей x и y ;
 K_3 - абсолютное значение продольной жесткости 1-го слоя;
 φ_x - угол изгиба пластины в направлении оси x ;
 r - радиус кривизны, плотность;
индекс "н" - начальное значение;
индекс "к" - конечное значение.

ВВЕДЕНИЕ

Для обеспечения необходимой надежности и стабильности работы ЭС при интенсивных механических воздействиях применяется ряд способов:

- использование наиболее устойчивых к механическим воздействиям электрорадиоэлементов и узлов; повышение прочности конструктивных элементов;
- изоляция ЭС от источников механических воздействий;
- устранение или уменьшение до допустимого уровня резонансных явлений в конструкциях ЭС, достигаемое путем выведения спектров собственных частот колебаний элементов конструкций за верхнюю границу диапазона частот возмущающего воздействия или увеличением демпфирующих свойств;
- уменьшение активности источников механических воздействий;
- применение активной виброзащиты в виде автоматических систем с внешним источником энергии.

Работа по обеспечению нормального функционирования ЭС начинается с сопоставления допустимых параметров механических воздействий на электрорадиоэлементы (ЭРЭ) с требованиями технического задания (ТЗ). Если применяемые ЭРЭ удовлетворяют требованиям ТЗ, дальнейшие усилия необходимо направить на устранение резонансных колебаний и обеспечение прочности элементов конструкций ЭС. В случае успешного решения этих вопросов задачу по обеспечению защиты РЭА от механических воздействий на данном этапе проектирования можно считать выполненной. Если устранить или уменьшить резонансные колебания до допустимого уровня не удастся, то следует применить общую или локальную виброизоляция. Для обеспечения необходимой защиты от механических воздействий часто приходится применять рассмотренные способы совместно.

Решение этих задач возможно, если конструктор ЭС глубоко понимает физические основы защиты аппаратуры от механических воздействий, знает математические методы их расчета и умеет реализовать выбранные меры защиты в конструкции. Необходимо помнить, что задача обеспечения надежности ЭС при механических воздействиях тесно связана с другими задачами конструирования, такими, как обеспечение высоких массо-габаритных показателей изделий, обеспечение теплового режима, ремонт-топригодности. Это оказывает существенное влияние на выбор тех или иных способов вибро- и

ударозащиты. Например, заливка электронных уз-лов полимерными компаундами значительно повышает их жесткость и прочность, но ухудшает тепловой режим и ремонтпригодность и поэтому не всегда возможна.

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Свободные колебания. Можно рассматривать свободные колебания без затухания и с затуханием. Несмотря на то что свободные колебания без затухания в природе не встречаются, их анализ часто проводится с целью определения собственных частот колебаний системы.

Допустим, что состояние равновесия системы, показанной на рис. 1, каким-то образом нарушено. Тогда движение системы будет представлять свободные колебания, описываемые выражением (1):

$$m\ddot{z} + kz = 0, \quad (1)$$

или, учитывая, что свободные колебания линейных систем являются гармоническими,

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0,$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad - \quad (2)$$

постоянная, определяемая только свойствами системы.

Очевидно, что частными решениями уравнения (1) являются

$z = C_1 \sin \omega_0 t$ или $z = C_2 \cos \omega_0 t$, а его общее решение (общий интеграл)

$$z = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t,$$

где C_1 и C_2 - постоянные, определяемые из начальных условий ($t = 0, z = 0, \dot{z} = 0$).

Последнее выражение можно также представить в виде

$$z = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (3)$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ - амплитуда колебаний; $\alpha = \arctg \frac{C_2}{C_1}$ - начальная фаза.

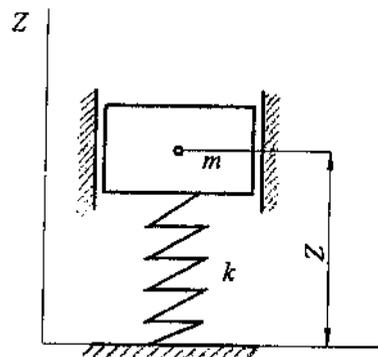


Рис. 1.6. Система с одной степенью свободы

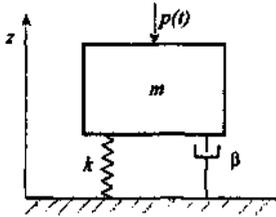
Из выражения (3) видно, что движение системы повторяется после

такого промежутка времени T , когда аргумент $\omega_0 t + \alpha$ возрастает на 2π , то есть должно быть $\omega_0(t + T) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi$.

Отсюда период колебаний $T = 2\pi/\omega_0$, а постоянная ω_0 имеет смысл *собственной угловой частоты колебаний*.

К уравнению типа (1) приводятся многие задачи о колебаниях механических систем и в этих случаях собственная угловая частота колебаний может быть найдена по формуле (2).

Силовое гармоническое возбуждение линейной системы. Уравнение движения такой системы (рис. 2) при действии силы $p(t) = P_0 e^{j\omega t}$ с амплитудой P_0 и частотой ω можно представить в следующем виде:



$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = P_0 e^{j\omega t}, \quad (4)$$

где k , β - коэффициенты жесткости и сопротивления соответственно.

Рис. 2. Система с одной степенью свободы при силовом воздействии

Общее решение уравнения (4) состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и одного из частных решений уравнения (4). Физически этот результат представляет собой наложение свободных и вынужденных колебаний системы, и результирующее колебание не будет гармоническим. Однако, так как через определенный промежуток времени свободные колебания затухнут, то для практики представляет интерес вторая, «стационарная» часть решения. Она может быть представлена в виде:

$$z = z(t) = S_b e^{j(\omega t + \alpha)}, \quad (5)$$

где S_b - амплитуда вибрации; α - сдвиг фаз между силой и перемещением:

$$\alpha = \arctg \frac{\beta \omega}{k - m \omega^2}. \quad (6)$$

Подставляя решение (2.5) в уравнение (2.4), получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega\beta + k)z(t) = p(t),$$

откуда $z(t) = p(t)\Phi_z(j\omega)$. Величина

$$\Phi_z(j\omega) = 1/(k - m\omega^2 + j\omega\beta), \quad (7)$$

являющаяся по смыслу передаточной функцией, называется *частотной характеристикой* системы. Она показывает, как изменяется амплитуда S_b вынужденных колебаний с изменением частоты возбуждения ω . Знаменатель выражения (7) называется *динамической жесткостью* системы. Она характеризует сопротивление системы воздействию гармонической силы. Амплитуда вынужденных колебаний

$$S_b = |z(t)| = \frac{z_{ст}}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2}}, \quad (8)$$

где $z_{ст} = P_0 / k$ - статическое смещение системы под воздействием силы P_0 ;
 $\nu = \omega / \omega_0$ - коэффициент расстройки, или частотное отношение;
 $\eta = \beta \omega_0 / k$ - коэффициент механических потерь (КМП).

Из (8) находим одну из основных динамических характеристик системы - коэффициент динамического усиления, или *коэффициент динамичности*:

$$\mu = \frac{S_b}{z_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2 \nu^2}}, \quad (9)$$

который показывает, как изменяется амплитуда S_b вынужденных колебаний системы по отношению к ее статическому смещению под действием силы P_0 в зависимости от коэффициента расстройки ν .

Для системы с диссипативной силой в виде $j\gamma \dot{z}$ уравнение движения будет иметь вид:

$$m\ddot{z} + (1 + j\gamma)kz = P_0 e^{j\omega t}. \quad (10)$$

Подставляя в это уравнение частное решение (5), получаем:

$$S_b = |z(t)| = z_{ст} / \sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2}.$$

Откуда находим коэффициент динамического усиления

$$\mu = S_b / z_{ст} = 1 / \sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2}. \quad (11)$$

Для расчета резонансных амплитуд необходимо в формулы (9) или (11) подставить значение $\nu = 1$. Тогда получим: $\mu = 1/\eta$ независимо от принимаемой модели диссипативной силы.

Кинематическое гармоническое возбуждение. Пусть основание системы (рис. 3) перемещается по гармоническому закону

$$z_a = S_0 e^{j\omega t}, \quad (12)$$

где S_0 - амплитуда виброперемещения основания. Тогда уравнение движения системы с вязким трением имеет вид:

$$m\ddot{z} + \beta(\dot{z} - \dot{z}_a) + k(z - z_a) = 0. \quad (13)$$

Здесь $z - z_a = z_1$ - упругая деформация связей.

Подставляя в это уравнение частное решение в виде (5), где угол α будет определять сдвиг фаз между перемещением

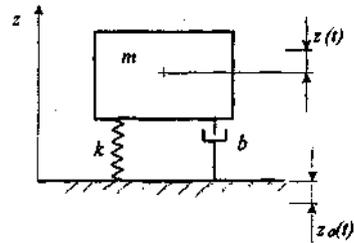


Рис. 3 Система с одной степенью свободы при кинематическом возбуждении

основания и системы, и выражение для виброперемещения основания z_a из (12), после преобразований получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega\beta + k)z = (j\omega\beta + k)z_a, \quad (14)$$

откуда найдем передаточную функцию

$$\Phi(j\omega) = z/z_a = (k + j\omega\beta)/(k - m\omega^2 + j\omega\beta). \quad (15)$$

Амплитудакоробаний системы

$$S_s = |z| = |z_a| \frac{\sqrt{k^2 + \omega^2\beta^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2}} = S_0 \frac{\sqrt{1 + \eta^2 v^2}}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2}}.$$

Величина

$$\mu = S_s/S_0 = \sqrt{1 + \eta^2 v^2} / \sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2} \quad (16)$$

получила название *коэффициента передачи*. Она выражает соотношение между амплитудами S_s системы и S_0 основания при кинематическом возбуждении колебаний.

Подставляя в (13) переменную z_1 и используя (12), получаем уравнение, описывающее деформацию связи в процессе колебаний:

$$m\ddot{z}_1 + \beta\dot{z}_1 + kz_1 = m\omega^2 S_0 e^{j\omega t}.$$

Принимая решение этого уравнения в виде $z_1 = S_{1B} e^{j\omega t}$, где S_{1B} - амплитудное значение деформации, получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega\beta + k)z_1 = m\omega^2 z_a.$$

Отсюда найдем коэффициент передачи для деформации связи

$$\mu_1 = \frac{S_{1B}}{S_0} = \frac{v^2}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2}}. \quad (17)$$

При $v = 0$ $\mu_1 = 0$; при $v = 1$ $\mu_1 = 1/\eta$; при $v \rightarrow \infty$ $\mu_1 = 1$.

Для системы с демпфированием, пропорциональным перемещению, уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{z} + (1 + j\eta)(z - z_a)k = 0. \quad (18)$$

Подставляя это уравнение выражения (2.5) и (2.12), получаем:

$$S_s = |z| = |z_a| = \sqrt{1 + \eta^2} / \sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2}.$$

Следовательно, коэффициент передачи

$$\mu = \sqrt{1 + \eta^2} / \sqrt{(1 + v^2)^2 + \eta^2}. \quad (19)$$

График зависимости μ от коэффициента V приведен на рис. 4

Эти графики позволяют объяснить основные способы виброзащиты ЭС - виброизоляцию, частотную отстройку, вибродемпфирование.

Как видим, на рис. 4 можно выделить три области. Первая, когда $\nu < 0,4$ и $\mu \approx 1$, называется областью *дорезонансных колебаний*. Так как $\nu = f/f_0$, для этой области справедливо неравенство $f_0 > 2,5f$. То есть для исключения возможности резонансных колебаний необходимо, чтобы собственная частота колебаний f_0 в 2,5 раза превышала частоту возбуждения. На практике чаще используют соотношение

$$f_0 > 2f \quad (20)$$

Это объясняется тем, что в государственных стандартах указано: резонанс отсутствует, если $\mu < 2$. Это условие обычно выполняется при соотношении $\nu < 0,5$, из которого и получается условие (20). Этот способ устранения резонансных колебаний называется *частотной отстройкой*. Его обычно применяют, если частоты возбуждающих колебаний не превышают 500 Гц, так как при действии вибраций в более широком диапазоне для увеличения w_0 приходится повышать жесткость конструкции (см. формулу (2)). Практически это достигается увеличением толщины конструкции, применением ребер жесткости и так далее, что может привести к значительному увеличению массы.

Поэтому, если частотный диапазон возбуждения превышает 500 Гц, полностью устранить резонансные колебания не удается и конструкция будет находиться в области *резонансных колебаний*, когда $0,5 < f/f_0 < 1,5$. (21) В этом случае обычно $\mu \gg 1$, что недопустимо, так как могут возникать отказы из-за многократного возрастания амплитуд колебаний. Уменьшить амплитуды можно увеличением КМП, то есть увеличением *демпфирующих* свойств конструкции. Этот способ особенно перспективен для ЭС аэрокосмического комплекса.

На практике часто возникают ситуации, когда амплитуды возбуждающих колебаний, задаваемые нормативно-технической документацией

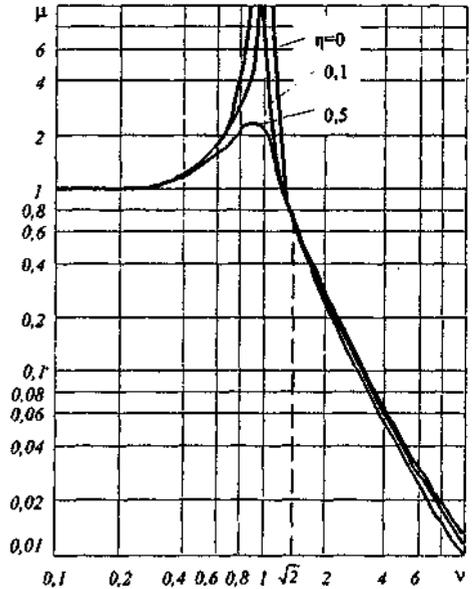


Рис. 4. Зависимость коэффициента передачи от коэффициента настройки для деформации связи

превышают допустимые для ЭРЭ или других элементов конструкции. Это требует изоляции изделия от виброактивного основания с целью обеспечения условия $\mu < 1$. Это достигается в *резонансной области*, когда $\nu > \sqrt{2} = 1,41$. Для обеспечения эффективной *виброизоляции*, когда $\mu < 0,1 - 0,2$, необходимо выполнить условие

$$f/f_0 > 4 + 5 \quad (22)$$

СВОБОДНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН

Собственные частоты колебания пластинчатых конструкций.

При расчете пластин (рис.5) обычно принимают следующие допущения:

1) изгибные деформации пластин при колебаниях малы по сравнению с её толщиной, упругие деформации подчиняются закону Гука;

2) пластина имеет постоянную толщину;

3) в пластине имеется нейтральный слой, который при изгибных колебаниях пластины не подвержен деформациям растяжения - сжатия;

4) материал пластины идеально упругий, однородный и изотропный;

5) справедлива гипотеза прямых нормалей, согласно которой все прямые, нормальные к среднему слою пластины до деформирования, остаются прямыми и нормальными к ней и после деформации.

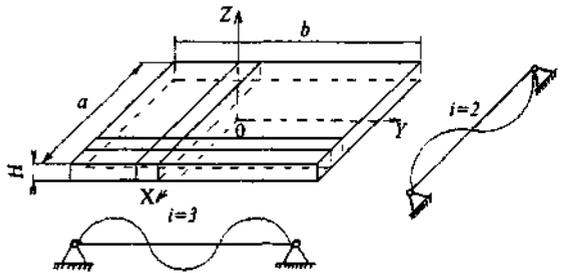


Рис. 5. Пластина и возможные формы её колебаний

При составлении уравнений движения можно использовать уравнение изгиба пластины при действии распределенной статической нагрузки $q(x, y)$

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = q(x, y), \quad (23)$$

где $\omega = \omega(x, y)$ - прогиб пластины в точке с координатами x и y ; D — цилиндрическая жесткость пластины:

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (24)$$

В (24) E и ν - соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, а H - её толщина.

Заменяя в (23) в соответствии с принципом ДАламбера статистическую нагрузку силой инерции $m(\partial^2 z / \partial t^2)$, получим уравнение свободных незатухающих (собственных) колебаний пластины:

$$m \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) + D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = 0, \quad (25)$$

где $z = z(x, y, t)$.

Наибольшее распространение для решения задач о собственных колебаниях получили точные методы, основанные на непосредственном решении уравнения (25), а также приближенные энергетические методы, основанные на законе сохранения энергии. В дальнейшем необходимо знать формулы для вычисления максимальных значений кинетической T_{\max} и потенциальной Π_{\max} энергии пластины:

$$T_{\max} = \frac{\rho H \omega_0^2}{2} \iint_{S_n} \omega^2 dx dy; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = \frac{D}{2} \iint_{S_n} & \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \quad (27) \end{aligned}$$

где S_n - площадь пластины; ρ - плотность материала.

Точный метод расчета собственных частот колебаний пластин. Известно точное решение задачи о собственных колебаниях конструкции типа прямоугольных пластин, когда две противоположные стороны свободно оперты при любых граничных условиях на двух других краях. Наиболее простое решение получается, когда все края пластины свободно оперты. Решение уравнения собственных колебаний (25) в этом случае имеет вид

$$z(x, y, t) = w(x, y) \cdot e^{i\omega_0 t}.$$

Амплитудная функция $w(x, y)$, называемая собственной формой колебаний пластины, определяется выражением

$$w(x, y) = A_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right),$$

где a и b - размеры сторон пластины; i, j - число полувольт синусоиды в направлении осей x и y соответственно.

Нетрудно убедиться, что это решение удовлетворяет граничным условиям на контуре

$$z = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a;$$

$$z = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b,$$

которые означают равенство нулю прогибов и изгибающих моментов на края пластины.

Подставляя решение $z(x, y, t)$ в (25), получаем:

$$\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{b}\right)^2 = \omega_0^2 \frac{\rho H}{D},$$

отсюда собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \pi^2 \left[\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{f}{b}\right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho H}}. \quad (28)$$

Приближенные методы расчета собственных частот колебаний пластин. Рассмотренный выше точный метод расчета собственных частот колебаний применим только для однородных прямоугольных пластин, свободно опертых на двух других противоположных краях. На практике часто необходимо определить собственные частоты колебаний конструкций, не удовлетворяющих этим требованиям. В таких случаях применяются приближенные методы Рэлея, Ритца, Бубнова-Галеркина и др.

Метод Рэлея. По методу Рэлея собственная частота ω_0 определяется из сопоставления выражений для кинетической и потенциальной энергии колебаний системы.

Максимальные значения кинетической и потенциальной энергии пластин, совершающих одно из главных колебаний

$$z(x, y, t) = w(x, y) \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

определяются по формулам (3.36), (3.37), тогда для ω_0 получим

$$\omega_0 = \frac{D}{\rho H} \cdot \frac{\int_0^a \int_0^b \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy}{\int_0^a \int_0^b w^2 dx dy},$$

где Δ - оператор Лапласа.

Собственная форма колебаний пластины запишется в виде

$$w_{ij}(x, y) = w_i(x) w_j(y), \quad (28a)$$

где $w_i(x)$, $w_j(y)$ - базисные функции. Наиболее часто функции $w_i(x)$, $w_j(y)$ представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} w_i(x) &= \sin k_i x + \bar{A}_i \cos k_i x + \bar{B}_i \operatorname{sh} k_i x + \bar{C}_i \operatorname{ch} k_i x \\ w_f(y) &= \sin k_f y + \bar{A}_f \cos k_f y + \bar{B}_f \operatorname{sh} k_f y + \bar{C}_f \operatorname{ch} k_f y \end{aligned} \right\}; \quad (29)$$

где $k_i = \lambda_i/a$; $k_f = \lambda_f/b$.

Коэффициенты $\bar{A}_i, \bar{A}_f, \bar{B}_i, \bar{B}_f, \bar{C}_i, \bar{C}_f$ и параметры λ_i, λ_f , находятся из граничных условий.

Если на плате есть элементы, которые необходимо рассматривать как сосредоточенные массы m_n , то значение максимальной кинетической энергии находится по формуле

$$T_{\max} = \frac{m_0 \Omega_0}{2} \iint_S w^2(x, y) dS + \sum_{n=1}^S m_n w_n^2(x, y),$$

где $w_n(x, y)$ - максимальный прогиб в точке сосредоточения n -й массы.

В РЭА часто используются платы, закрепленные в отдельных точках (рис 6). Если плата крепится на колонках винтами, то такому креплению наиболее точно соответствует схема свободного опирания в этих точках. Базисные функции в этом случае должны удовлетворять геометрическим и динамическим условиям как в точках крепления, так и на контуре. Для рассматриваемого случая, например, в точках крепления $w = 0, \partial^2 w / \partial x^2 = \partial^2 w / \partial y^2 = 0$. На краях

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

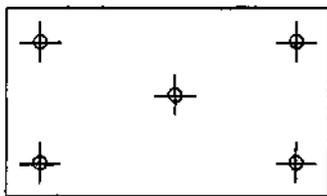


Рис. 6. Плата, закреплённая в пяти точках

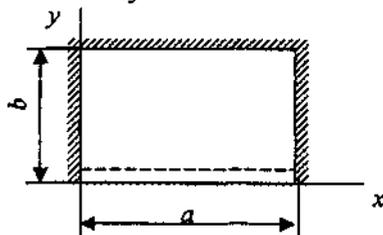


Рис. 7 Расчётная модель платы, у которой три края защемлены

Приведем примеры определения собственных частот колебаний методом Рэлея.

Пример 1 Получить формулу для определения первой собственной частоты колебаний ячейки, состоящей из прямоугольной платы с равномерно расположенными по площади платы электрорадиоэлементами с общей приведенной массой $m_s = m_0$.

Способ крепления платы позволяет считать три её края жестко закрепленными и один свободно опертым (рис.7).

Решение. В качестве первого приближения собственную форму колебаний представим в виде

$$w_1 = w_1(x, y) = w_1(x)w_1(y), \quad (30)$$

где $w_1(x), w_1(y)$ - базисные функции типа (3.39), удовлетворяющие соответствующим краевым условиям для балки, жестко зашпеленной по концам, и балки с жестким креплением одного конца и свободным опиранием на другом.

Учитывая выражение (30), формулы для определения максимальных кинетической и потенциальной энергии приведем к виду

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{(m_s + m_0)\omega_{01}^2}{2} \int_0^a \int_0^b w_1 dx dy = \frac{(m_s + m_0)\omega_{01}^2}{2} \int_0^a w_1^2(x) dx \int_0^b w_1^2(y) dy; \\ \Pi_{\max} &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \frac{D}{2} \int_0^a w_1''^2(x) dx \times \\ &\times \int_0^b w_1^2(y) dy + D \int_0^a w_1(x) w_1''(x) dx \int_0^b w_1(y) w_1''(y) dy + \\ &+ \frac{D}{2} \int_0^a w_1^2(x) dx \int_0^b w_1''^2(y) dy. \end{aligned} \quad (31)$$

Значения интегралов для соответствующих способов крепления концов находим в табл. П 4. Получим

$$\begin{aligned} 2T_{\max} &= 1,04 \cdot 0,5(m_s + m_0)ab\omega_{01}^2 = 0,52(m_s + m_0)ab\omega_{01}^2; \\ 2\Pi_{\max} &= D \left(\frac{518,52 \cdot 0,5b}{a^3} + 2 \frac{12,78 \cdot 5,57}{ab} + \frac{1,04 \cdot 118,8a}{b^3} \right) = 259,26 \times \\ &\times \left(\frac{b}{a^3} + \frac{0,549}{ab} + \frac{0,475a}{b^3} \right). \end{aligned}$$

Из равенства $T_{\max} = \Pi_{\max}$ найдем

$$\omega_{01} = \frac{\alpha_1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{(m_s + m_0)}},$$

где $\alpha_1 = 22,372 \sqrt{1 + 0,549\beta^2 + 0,475\beta^4}$, $\beta = a/b$.

Используя эту методику, можно получить формулы для определения первой собственной частоты колебаний ячеек с другими способами крепления. Некоторые из них приведены в табл. П 3.

Пример 2 Получить формулу для расчета основной собственной частоты колебаний шасси в виде прямоугольной пластины, нагруженной сосредоточенной массой M (рис.8). Способ крепления сторон соответствует шарнирному закреплению.

Потенциальная энергия пластины с сосредоточенной массой, как и для пластины без сосредоточенной массы, будет находиться по формуле (27). В формуле для кинетической

тической энергии необходимо учесть и кинетическую энергию сосредоточенной массы, равную $(M\omega_0^2/2)w_m(x, y)$. Получим

$$T = \frac{m_0\omega_0^2}{2} \int_0^a \int_0^b w_1(x, y) dx dy + \frac{M\omega_0^2}{2} w_m(x, y), \quad (32)$$

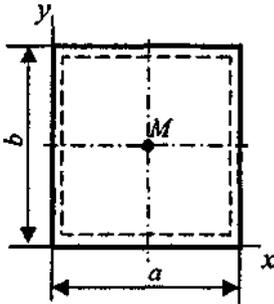


Рис. 8. Расчетная модель шасси, нагруженного сосредоточенной массой.

где w_m - прогиб пластины в точке расположения сосредоточенной массы.

В первом приближении форму колебаний, как и в предыдущем примере, представим в виде $w_1 = w_1(x, y) = w_1(x)w_1(y)$. Используя (31) и табл. П.4, найдем:

$$2T_{\max} = D \left(\frac{48,705 \cdot 0,5b}{a^3} + \frac{2 \cdot 4,934^2}{ab} + \frac{48,705 \cdot 0,5a}{b^3} \right) = \frac{D\pi^4}{4a^2\beta} (1 + 2\beta^2 + \beta^4),$$

где $\beta = a/b$.

Так как для шарнирного крепления (см. табл. П.2)

$$w_1(x) = \sin(\pi x/a) \text{ и } w_1(y) = \sin(\pi y/b),$$

то для координат $x = a/2, y = b/2$ получим $w_1(a/2, b/2) = 1$.

Максимальная кинетическая энергия

$$2T_{\max} = \frac{m_0\omega_0^2 ab}{4} + \frac{M\omega_0^2}{2} = \omega_0^2 \left(\frac{m_0 ab}{4} + \frac{M}{2} \right).$$

Из равенства максимальных кинетической и потенциальной энергий найдем

$$\omega_0^2 = \frac{D\pi^4(1 + 2\beta^2 + \beta^4)}{4a^2\beta(m_0 ab/4 + M/2)}.$$

После несложных преобразований получим

$$\omega_0 = (\alpha/a^2) \sqrt{D/m_0 K_m},$$

где $\alpha = \pi^2 \sqrt{1 + 2\beta^2 + \beta^4}$, $\beta = a/b$; $K_m = \sqrt{1 + 2M/m_0 ab}$.

Коэффициент K_m учитывает влияние сосредоточенной массы на собственную частоту колебаний.

Метод Рэлея дает хорошие приближения для основного тона пластины, с ростом номера обертона точность уменьшается.

Метод Ритца. Этот метод является развитием метода Рэлея, поэтому его часто называют методом Рэлея-Ритца.

Для пластин собственная форма колебаний ищется в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} w_{ij}(x, y),$$

где $w_{ij}(x, y)$ - базисные функции, выбираемые в соответствии с граничными условиями, а коэффициенты a_{ij} определяются из условия экстремума функционала $(T_{\max} - \Pi_{\max})$, т.е. из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} (T_{\max} - \Pi_{\max} = 0).$$

Взяв производную, найдем систему из n алгебраических уравнений. Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при a_i , получаем частотное уравнение, решая которое, найдем n собственных частот колебаний. С помощью этого метода получены формулы расчета пластин с различными способами крепления.

Широко распространены формулы

$$\omega_i = (\alpha_i / a^2) \sqrt{D / m K_{ЭРЭ}}, \text{ рад/с;} \quad (33)$$

$$f_i = (\alpha_i / 2\pi a^2) \sqrt{D / m K_{ЭРЭ}}, \text{ Гц,} \quad (33.a)$$

где $K_{ЭРЭ}$ — коэффициент, учитывающий массу ЭРЭ;

α_i - коэффициент, зависящий от способа крепления пластины, соотношения ее сторон, номера обертона и определяемый часто из табл. ПЗ.

Формулу (33) иногда приводят к виду

$$f = 10^5 K_m K_{ЭРЭ} B H / a^2, \quad (34)$$

где $K_m = \sqrt{E \rho_c / E_c \rho}$; E, E_c - модули упругости применяемого материала и стали; ρ, ρ_c - их плотности;

$$K_{ЭРЭ} = 1 / \sqrt{1 + m_3 / m_{\Pi}},$$

m_3 - масса элементов, равномерно размещенных на плате; m_{Π} - масса платы; частотный коэффициент $B = (\alpha / 2\pi) \sqrt{D / m_0}$; H - толщина; a - длина платы. Значения коэффициентов $K_m, K_{ЭРЭ}$ и B даны в [29].

Для приближенных расчетов спектра собственных частот при различных граничных условиях коэффициент α , входящий в формулу (33), можно рассчитать по выражению

$$\alpha = \pi^2 \sqrt{A_i^4 + A_j^4 \beta^4 + 2\beta^2 [\sigma B_i B_j + (1 - \sigma) C_i C_j]}. \quad (35)$$

Коэффициенты $A_i, A_j, B_i, B_j, C_i, C_j$ находятся при помощи табл. 1 для различных сочетаний краевых условий на противоположных сторонах пластины (C - защемленный, S - опертый, F - свободный края).

Значения постоянных А, В, С

Таблица 1

Гранич- ные ус- ловия	i=1			i=2			i≥3		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
S-S	0	0	0	1	1	1	i-1	A2	A2
S-C	0	0	0	1.25	A(A-1/π)	B	i-0.75	A(A-1/π)	B
S-F	0	0	3/π ²	1.25	A(A-1/π)	A(A+3/π)	i-0.75	A(A-1/π)	A(A+3/π)
C-C	0	0	0	1.506	1.248	1.248	i-0.5	A(A-2/π)	B
C-F	0.597	0.087	0.471	1.494	1.347	3.284	i-0.5	A(A-2/π)	A(A+2/π)
F-F	0	0	12/π ²	1.506	1.248	5.017	i-0.5	A(A-2/π)	A(A+6/π)

Для расчета прямоугольной пластины, жестко заземленной по контуру, можно использовать табл. 2.

Таблица 2

**Частотный коэффициент α_j заземленной по контуру
прямоугольной пластины**

m_2	a/b	m_1		
		1	2	3
1	1	36.0	73.4	131.9
	1.5	27.0	65.5	126
	2	24.6	64.1	124
2	1	73.4	108.2	165
	1.5	41.7	79.8	138.6
	2	31.8	71.1	130.4
3	1	131.9	165	220.1
	1.5	66.5	103	161.2
	2	44.8	83.2	142.4

Пример 3. Рассчитать первые две собственные частоты колебаний жестко заземленной по контуру прямоугольной платы с размерами $a=0,16$ м, $b=0,17$ м и толщи-

ной $H=0,0015\text{м}$. Материал платы - стеклотекстолит, $E=3 \cdot 10^{10}\text{Па}$, $\sigma=0,22$, $\rho=2,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Масса ЭРЭ на плате равна $0,093 \text{ кг}$.

Решение. По формуле (24) находим цилиндрическую жесткость

$$D = \frac{3 \cdot 10^{10} (1,5 \cdot 10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 8,87 \text{ Н/м}.$$

Учитывая, что на первой СЧК в направлениях X и Y имеются по две узловые линии (в местах крепления), по формуле (35), используя табл. 3.3 для случая $i=j=2$, находим

$$\alpha_{22} = 3,14^2 \sqrt{1,506^4 + 1,506^4 \left(\frac{0,16}{0,17}\right)^4 + 2 \left(\frac{0,16}{0,17}\right)^2 \times \dots} \\ \dots \times [0,22 \cdot 1,248^2 + (1 - 0,22) \cdot 1,248^2] = 34,91.$$

По формуле (33,а) находим

$$f_{01} = \frac{34,91}{2\pi \cdot 0,16^2} \sqrt{\frac{8,87}{2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} + \frac{0,093}{0,16 \cdot 0,17}}} = 252 \text{ Гц}.$$

Для второй СЧК $i=2, j=3$. Находим

$$\alpha_{23} = \pi^2 \sqrt{1,25^4 + 2,25^4 \cdot 0,94^4 + 2 \cdot 0,94^2 \times \dots} \\ \dots \times [0,22 \cdot 1,248 \cdot 4,66 + (1 - 0,22) \cdot 1,248 \cdot 4,66] = 64,9 \\ f_{02} = 64,9 \cdot 7,4 = 480 \text{ Гц}.$$

Способы крепления конструкций плат часто отличаются от принимаемых моделей в виде свободного опирают, жесткого защемления и т.п. Наиболее точно реальным условиям обычно соответствует упругое закрепление с тем или иным коэффициентом упругости защемления C , который, как правило, неизвестен.

На рис.3.8 показана зависимость коэффициента α от безразмерного коэффициента защемления $[10] c. = Ca/2D$ для прямоугольной пластины.

Причем случай, когда $c. = 0$, соответствует свободному

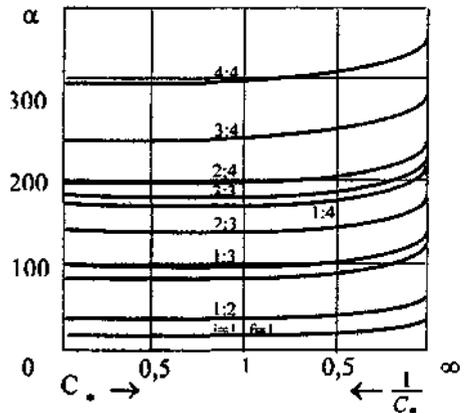


Рис. 9. Зависимость частотного коэффициента α от безразмерного коэффициента защемления C . (i, j — число полуволн в направлении осей x и y соответственно)

опиранию, а при $C_0 \rightarrow \infty$ имеем случай жесткого защемления.

На основе рис. 9 можно сделать следующие выводы: если коэффициент упругости защемления неизвестен, целесообразно принять $1/c_0 = 0,25$. В этом случае относительная ошибка определения собственной частоты колебаний не превысит 50% при низких собственных частотах ($i = 1; f = 1$) и 15% при высоких собственных частотах ($i = 4; f = 4$). Можно определить интервал, в котором будет находиться собственная частота колебаний, сделав расчет для случая свободного опирания (нижний предел) и жесткого защемления (верхний предел). Если указанная точность недостаточна, собственную частоту колебаний определять экспериментально.

В других случаях, когда сосредоточенная масса расположена не в центре платы или их несколько, необходимо обратиться к специальной литературе. Там же можно найти расчет СЧК пластин, свободно опертых по контуру и в отдельных точках внутри области, а также прямоугольных пластин переменной толщины.

В случае точечного крепления плат (рис. 10) СЧК рассчитывается по формуле

$$f_0 = 1,57 \left(A + \frac{1}{b^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$

где $A = 1/a^2$ при $n=4$; $A = 4/(a^2 + b^2)$ при $n=5$; $A = 0,25/a^2$ при $n=6$.

Для расчета собственных частот колебаний съемных оснований электронных модулей (ЭМ), крепящихся в направляющих, можно использовать формулы из табл. 3

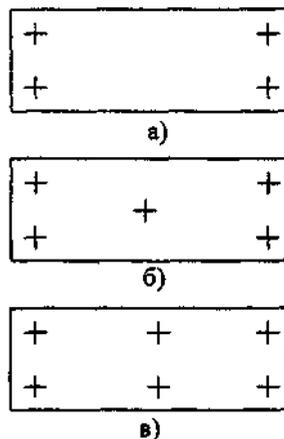


Рис. 10. Точечное крепление плат

Таблица 3

СЧК прямоугольных плат в направляющих

Размер основания $a \times b$, мм	Собственная частота, Гц	Размер основания $a \times b$, мм	Собственная частота, Гц
170 × 75	$\frac{2 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + m_2/m_n}}$	170 × 200	$\frac{0,65 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + m_2/m_n}}$
170 × 150	$\frac{1,17 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + m_2/m_n}}$	170 × 280	$\frac{0,33 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + m_2/m_n}}$

Пример 4. Рассчитать собственные частоты колебаний ЭМ, вставляемого в направляющие, в диапазоне до **800 Гц**. Материал печатной платы-стеклотекстолит марки СТЭФ. Общая масса ЭРЭ, равномерно расположенных по площади ПП с размерами **$1.22 \times 140 \times 140$ мм**, равна **0,05 кг**.

Для стеклотекстолита СТЭФ из табл. П 1

находим $E=3,02 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho=2,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\nu=0,22$. Рассчитываем по формуле (24) цилиндрическую жесткость:

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} (1,22 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,22^2)} = 4,8 \text{ Н/м};$$

Приведенная к единице площади масса платы и ЭРЭ

$$m = \rho H + \frac{m_2}{ab} = 2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,22 \cdot 10^{-3} + \frac{0,05}{0,14^2} = 5,05 \text{ кг/м}^2.$$

Так как на сторонах платы, не входящих в направляющие, расположены колодка и вилка разъема, жесткости которых значительно больше жесткости ПП, то создается неопределенность в выборе расчетной модели. В этом случае целесообразно провести расчет СЧК для крайних случаев - свободного опирания и жесткого защемления. Истинные значения СЧК будут находиться между расчетными значениями СЧК. Для свободного опирания найдем:

$$\alpha_1=9,87(1+1)=19,74; \alpha_2=9,87(2^2+1)=49,35; \alpha_3=9,87(2^2+2^2)=78,96$$

и СЧК

$$f_{01} = \frac{19,74}{6,82 \cdot 0,14^2} \sqrt{\frac{4,8}{5,05}} = 155,7 \text{ Гц}; f_{02} = 389,4 \text{ Гц}; f_{03} = 622,5 \text{ Гц}.$$

Используя табл.3.2 для случая жесткого защемления по контуру, получим

$$\alpha_1(m_1 = 1, m_2 = 1) = 36,0; \alpha_2(2,1) = 73,4; \alpha_3(2,2) = 108,2$$

и СЧК

$$f_{01}=36 \cdot 7,89=284 \text{ Гц}; f_{02}=73,4 \cdot 7,89=579,1 \text{ Гц}; f_{03}=108,2 \cdot 7,89=853,7 \text{ Гц}.$$

Следовательно, для рассчитываемой конструкции получим следующие значения:

$$\begin{aligned} 155,7 \leq f_{01} \leq 284 \text{ Гц}; & f_{01\text{ср}} = 219,9 \text{ Гц}; \\ 389,4 \leq f_{02} \leq 579,1 \text{ Гц}; & f_{02\text{ср}} = 484,3 \text{ Гц}; \\ 622,5 \leq f_{03} \leq 853,7 \text{ Гц}; & f_{03\text{ср}} = 738,1 \text{ Гц}. \end{aligned}$$

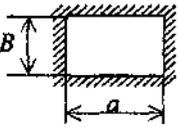
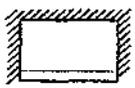
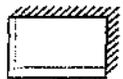
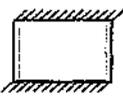
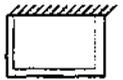
Однослойные ортотропные пластины. СЧК ортотропных прямоугольных пластин рассчитывается по формуле

$$f_0 = \frac{1,57\alpha}{b^2} \sqrt{\frac{D_1}{m}},$$

где частотные коэффициенты α находятся по формулам из табл. 4

Таблица 4

Частотный коэффициент α

Схема крепления	α
	$\left\{ 4,5\xi^4 + 2\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 4,5 \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 4,5\xi^4 + 4\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 7 \frac{D_2}{D_1} - 2 \left[5,5 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 + \xi^4 + \left(\frac{D_{lk}}{D_1} \right)^2 + 4,25\xi^2 \frac{D_k D_1}{D_1^2} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 1,44 \left[\xi^4 + \xi^2 \frac{D_k}{D_1} + \frac{D_2}{D_1} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ \xi^4 + 2\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 4,5 \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$
	$\left\{ \xi^4 + 4\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 7 \frac{D_2}{D_1} - 2 \left[5,5 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 + \xi^4 \frac{D_k}{D_1} + 4,25\xi^2 \frac{D_k D_2}{D_1^2} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 1,1\xi^4 + 2,09\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$

В этих формулах:

$$D_1 = E_1 H^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2); \quad D_3 = D_2 \nu_1 + 2D_k;$$

$$D_2 = E_2 H^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2); \quad D_k = GH_3 / 12;$$

$$\xi = b/a,$$

где E_1, E_2 - модули упругости в осевых направлениях;

ν_1, ν_2 - коэффициенты Пуассона в направлении осей X и Y ;

G - модуль сдвига.

Платы с ребрами жесткости. Для прямоугольной пластины, свободно опертой по контуру и имеющей параллельные сторонам ребра жесткости с одинаковыми прямоугольными поперечными сечениями, первая собственная частота колебаний [21]

$$f_{01} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B + \frac{r+1}{k+1} \xi^4 B + aD(\xi^2 + 1)^2}{b^3 \left(m_y + \frac{r+1}{k+1} m_x + \frac{m_n}{k+1} \right)}}, \quad (36)$$

где a, b - длина и ширина пластины; r, k - число ребер, параллельных осям X и Y ; m, m_x, m_y - массы пластины и ребер, параллельных осям X и Y соответственно; $\xi = b/a$.

Цилиндрическая жесткость пластины (24)

$$D = EH^3 / 12(1 - \nu^2).$$

Жесткость ребра

$$B = E_1 \frac{b_1 H_1^3}{12},$$

где E_1 - модуль упругости материала ребра; b_1, H_1 - ширина и высота ребра.

Пример 5. Определить, во сколько раз повысится первая собственная частота колебания ячейки, показанной на рис. 11, если для повышения ее жесткости применено ребро жесткости из дюралюминия Д16 с размерами поперечного сечения 2×10 мм. Плата, имеющая размеры $1 \times 100 \times 100$ мм, выполнена из стеклотекстолита.

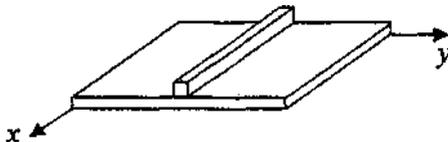


Рис. 11 Плата с ребром

Для дюралюминия модуль упругости $E=7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, плотность $\rho=2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; для стеклотекстолита $E_x=3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\rho=2,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; коэффициент Пуассона $\nu=0,22$. Масса элементов / n_3 равна массе платы m_n .

Решение. Для первой собственной частоты $m=n=1$. Приведем (36) к виду:

$$f_1 = \frac{\pi}{a^2} \sqrt{\frac{a}{2} \frac{B_x + 2aD}{2m_x + m_n + m_{\Pi}}}$$

Подставляя численные значения параметров в формулы для B_x и D , находим

$$B_x = 7 \cdot 10^{10} \frac{2 \cdot 10^{-3} (10^{-2})^3}{12} = 11,7 \text{ Н/м}^2;$$

$$D = \frac{3 \cdot 10^{10} (10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 2,64 \text{ Н/м}^2;$$

$$m_x = \rho b_1 H_1 = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ кг};$$

$$m_{\Pi} = \rho H = 2,05 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 2,05 \text{ кг};$$

$$f_1 = \frac{3,14}{0,1^2} \sqrt{\frac{0,1}{2} \frac{11,7 + 2 \cdot 0,1 \cdot 2,64}{2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-2} + 0,41}} = 339 \text{ Гц.}$$

Расчет для сравнения по формуле (33,а) показывает, что применение ребра жесткости повышает первую собственную частоту в 3,5 раза.

Многослойные пластины. Расчет ведется по формуле (33,а). Особенности расчета заключаются в определении цилиндрической жесткости D и плотности, которая приводится к однородной однослойной пластине.

Приведенная цилиндрическая жесткость пластины определяется по формуле

$$D = \frac{1}{3(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^n \bar{E}_i \left[\left(Z_0 - \sum_{k=1}^{i-1} h_k \right)^3 - \left(Z_0 - \sum_{k=1}^i h_k \right)^3 \right],$$

где Z_0 - расстояние нейтральной поверхности платы от верхней граничной поверхности, определяемой по формуле:

$$Z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i \left(2 \sum_{k=1}^i h_k - h_i \right)}{2 \sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i}, \quad (37)$$

где $\nu = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_i \bar{E}_i h_i}{\sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i}$ - приведенный коэффициент поперечного сжатия; $\bar{E}_i = E_i (1 - \nu_i^2)$ - эффективный модуль упругости слоя; E_i , ν_i , h_i - модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина слоя материала i -го слоя.

Приведенная плотность пластины определяется по формуле:

$$\bar{\rho} = \sum \rho_i h_i / \sum h_i,$$

где ρ_i - плотность материала i -го слоя.

Пример 6. Вычислить собственную частоту четырехслойной платы, имеющей схему поперечного сечения, показанную на рис.12. Прямоугольная плата размерами **170x 110x1,4** мм, закрепляемая в углах четырьмя шпильками **М3**, с трех сторон поддерживается пружинами - тепловодами, к четвертой стороне подсоединены плоские кабели, имеющие малую жесткость. Поэтому четвертую сторону можно считать свободной.

В первом приближении такую конструкцию можно считать прямоугольной пластиной, опертой по трем сторонам и свободной по четвертой (рис. 13). Такое допущение позволяет вычислить первую собственную частоту, значение которой будет приближенным, но достаточно точным для практики.

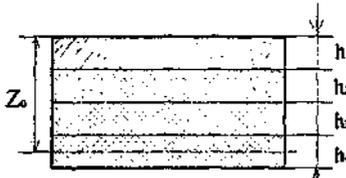


Рис. 12. Поперечное сечение платы



Рис. 13. Схема крепления платы.

Плата состоит из четырех слоев, содержащих два материала - медь и стеклотекстолит, имеющих следующие характеристики:

для меди: $E_1 = 13,2 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$; $\nu_1 = 0,3$; $\rho_1 = 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$; $h_1 = 0,2 \text{ мм}$;

для стеклотекстолита: $E_{2,3,4} = 3,3 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$; $\nu_{2,3,4} = 0,25$; $\rho_{2,3,4} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$;
 $h_2 = h_3 = 0,1 \text{ мм}$; $h_4 = 1 \text{ мм}$.

Расчетные значения эффективного модуля упругости будут:

$$\bar{E}_1 = \frac{13,2 \cdot 10^6}{1 - 0,3^2} = 14,5 \cdot 10^6 \text{ Н/с/}^2;$$

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_3 = \bar{E}_4 = \frac{3,3 \cdot 10^6}{1 - 0,25^2} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Н/с/}^2.$$

Приведенный коэффициент поперечного сжатия

$$\nu = \frac{0,3 \cdot 14,5 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 3,5 (0,01 + 0,01 + 0,1)}{(14,5 \cdot 0,02 + 3,5 \cdot 0,12) \cdot 10^6} \cdot 10^6 = 0,27.$$

Расстояние Z_0 до нейтральной поверхности вычисляется по формуле (37), которую в рассматриваемом примере запишем в развернутом виде:

$$Z_0 = \frac{\bar{E}_1 h_1^2 + \bar{E}_2 [2h_1(h_2 + h_3 + h_4) + 2h_2(h_3 + h_4) + 2h_3 h_4 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2]}{2[\bar{E}_1 h_1 + \bar{E}_2 (h_2 + h_3 + h_4)]}$$

Подставив в это выражение расчетные значения величин и произведя арифметические вычисления, найдем

$$Z_0 = \frac{(5,7 + 67) 10^{-4}}{(58 + 84) 10^{-3}} \approx 0,052 \text{ см.}$$

Соответственно значение приведенной изгибной жесткости будет равно:

$$D = \frac{1}{3 \cdot 0,927} [14,5 \cdot 114 + 3,5 (23,8 + 10 + 662,2)] = 1470 \text{ Н} \cdot \text{см.}$$

Приведенная плотность платы вычисляется для двух материалов - меди и стеклотекстолита:

$$\rho = \frac{8,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02 + 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,12}{0,14} = 3,34 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3.$$

Для пластины, показанной на рис. 13, с учетом данных табл. ПЗ, найдем:

$$\alpha = 9,87 \sqrt{1 + 0,43 \frac{a^2}{b^2}} = 9,87 \sqrt{1 + 0,43 \left(\frac{179}{110}\right)^2} = 14,43.$$

Первая собственная частота

$$f_{01} = \frac{14,06}{2\pi \cdot 0,17^2} \sqrt{\frac{14,7}{3,34 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-3}}} = 140,97 \text{ Гц.}$$

ЧАСТОТНАЯ ОТСТРОЙКА КАК СПОСОБ БОРЬБЫ С РЕЗОНАНСНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Как отмечалось, повышение жесткости элементов конструкции РЭА необходимо для смещения спектра собственных частот колебаний в более высокочастотную область. Из формулы Рэлея - Ритца видно, что влиять на спектр собственных частот колебаний можно изменением геометрических размеров плат, способов их крепления, материала, конфигурации и массы конструкции. Наибольшее применение в настоящее время находит изменение способов крепления, площади и толщины плат, а также применение ребер жесткости. Дадим оценку эффективности этих способов.

Влияние способов крепления. Для оценки возможностей этого способа рассмотрим, например, влияние способов крепления на квадратные платы. На рис. 14 приведено четыре способа крепления плат и соответствующие им коэффициенты усиления α . Видно, что изменение свободного опирания на жесткое защемление увеличивает первую собственную частоту колебаний примерно в 1,8 раза.



Рис. 14. Коэффициенты α для различных способов крепления плат

Влияние способов крепления, в том числе и точечного, на три первые собственные частоты колебаний прямоугольных плат из эпоксидного стеклопластика размером 2,54x. 10x15,25 мм показано на рис. 3.14 [8]. Видно,

что увеличение точек крепления с четырех (случай 6) до семи (случай 13) повышает первую собственную частоту колебаний немногим более чем в три раза. Влияние увеличения точек крепления на вторую и третью частоты еще меньше.

Влияние площади и толщины плат. Для оценки влияния площади электромонтажных плат на собственные частоты приведем пример из [1], где даны графики, показывающие зависимость частот собственных колебаний различных плат от их площади при 4-точечном закреплении. На рис.3.15 для примера приведен такой график для квадратных стеклотек-столитовых плат толщиной $1,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Из графика на рис.16 видно, что при уменьшении площади платы с **500 до 200 см²** частота первого тона увеличивается с 100 до 250 Гц, частота второго тона с 200 до 550 Гц. Это связано с увеличением жесткости платы.

Таким образом, уменьшая площадь платы, мы смещаем весь спектр собственных частот в более высокую область.

Для монтажных плат с установленными на них микросхемами сохраняется примерно та же зависимость собственных частот от площадей плат, что и рассмотренная выше. Следовательно, при конструировании плат с высокими собственными частотами конструктор сталкивается с нежелательным уменьшением монтажного пространства, необходимого для размещения элементов монтажа.

Рассмотрим влияние толщины плат на собственные частоты колебаний, для чего воспользуемся формулой Рэлея - Ритца. Как отмечалось ранее, формулу Рэлея — Ритца можно записать в виде (34):

$$f = 10^5 K_m K_{ЭРЭ} BH / a^2.$$

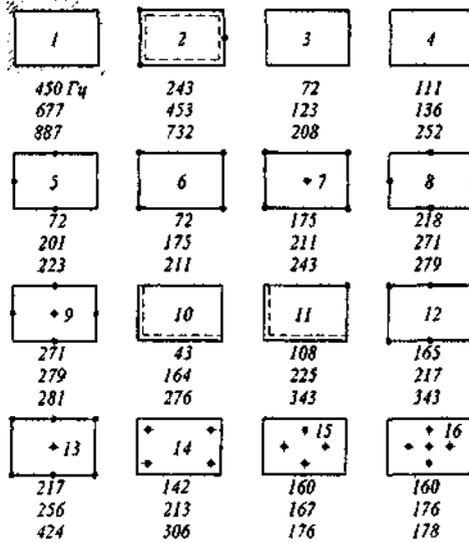


Рис. 15. Способы крепления плат

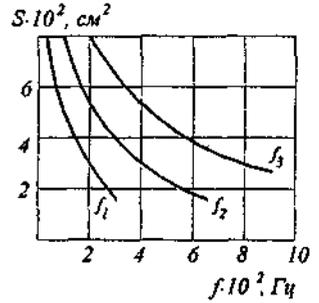


Рис. 16. Зависимость собственных частот колебаний от площадей плат

Из формулы следует, что увеличение толщины платы изменяет в сторону увеличения собственную частоту (Рис. 17). Однако при этом увеличивается масса платы, что является нежелательным, особенно для аппаратуры летательных аппаратов.

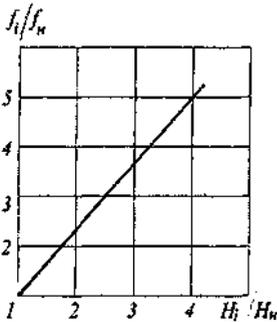


Рис. 17. Зависимость относительного повышения собственной частоты колебаний от относительного увеличения толщины платы (f_n, H_n — начальные значения собственной частоты и толщины платы)

ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕМПФИРОВАНИЯ ТИПЫ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ

Основные понятия и факторы, определяющие демпфирование колебаний. Термины и определения, относящиеся к вибрации, даются в ГОСТ 24346-80 "Вибрация. Термины и определения". В соответствии с указанным стандартом:

Демпфер - виброзащитное устройство или его часть, создающая демпфирование вибраций.

Демпфирование вибраций — уменьшение вибраций вследствие рассеивания механической энергии.

Под уменьшением вибрации понимают уменьшение значений каких-либо определенных величин, характеризующих вибрацию. Например, уменьшение амплитуд виброперемещения и виброускорения.

Демпфирование вибрации обусловлено действием диссипативной силы.

Диссипативная сила - сила, возникающая при движении механической системы и вызывающая рассеивание механической энергии.

Рассеивание механической энергии обусловлено переходом ее в тепло. Поэтому при вибрации может наблюдаться некоторое повышение температуры демпферов или их частей.

Демпфирование колебаний обусловлено следующими тремя факторами:

1. «Внешним» трением при колебаниях конструкции в окружающей среде.
2. «Внутренним трением» в материале.
3. Трением в подвижных и неподвижных соединениях.

Окружающей средой для ячеек обычно является воздух, обладающий небольшой вязкостью, поэтому «внешнее» трение обычно невелико. Обусловленное им аэродинамическое демпфирование, как правило, не превышает 5% от общего демпфирования колебаний конструкции и им при расчетах можно пренебречь.

«Внутреннее» трение в материалах имеет различную физическую природу. В кристаллических материалах оно обусловлено микропластическими деформациями по границам кристаллов и в объеме материала, в полимерах — преодолением сил молекулярного взаимодействия и т. д. В широко применяемых в конструкциях РЭС материалах - стеклотекстолите, алюминии, его сплавах и других - «внутреннее» трение обычно также невелико. Однако имеются полимеры, "внутреннее" трение которых в десятки и даже сотни раз превышает «внутреннее» трение обычных конструкционных материалов. Эти материалы получили название вибропоглощающих. Они и составляют основу полимерных демпферов, позволяющих существенно увеличить рассеяние энергии механических колебаний.

Трение в подвижных и неподвижных соединениях обуславливает

большую часть общего демпфирования колебаний, если не применяются демпферы колебаний. Обычно это трение между поверхностями в кинематических парах, а также в соединениях прессовых, шлицевых, резьбовых, заклепочных и т.п. Несмотря на то, что такие соединения называют неподвижными, при их динамическом нагружении возникают малые проскальзывания по контактными поверхностям. Возникающие при этом силы совершают работу, определяющую потери энергии механических колебаний.

Типы виброизоляторов. При выборе типа виброизоляторов учитываются следующие факторы:

климатические условия, определяющие в основном вид упругого элемента;

масса виброизолируемого аппарата, определяющая диапазон характеристик виброизолятора по грузоподъемности;

заданный срок службы, определяющий характеристики виброизолятора по надежности;

направленность воздействующих нагрузок, определяющий! характер нагружения виброизоляторов;

эксплуатационный диапазон возбуждающих частот, определяющий группу виброизолятора по собственным частотам.

В настоящее время существует большое количество различных типов виброизоляторов, которые отличаются как по виду упругого элемента, так и по конструктивному оформлению. Это является следствием широкого диапазона эксплуатационных условий и допустимых уровней перегрузки элементов аппаратуры. В этих условиях создание универсальных защитных устройств, пригодных для всех возможных случаев, становится чрезвычайно сложным. В данном случае конструктор сталкивается с задачей выбора виброизоляторов, наилучшим образом удовлетворяющих техническим требованиям, которые разделяются на три группы: динамические, климатические и конструктивные.

Динамические обеспечивают надежную виброизоляцию аппарата по всем координатным осям в заданном диапазоне частот, а также защиту от ударов. Для уменьшения амплитуды колебаний в случае возникновения резонансных режимов и быстрого гашения колебаний при толчках виброизоляторы должны иметь достаточное демпфирование. Для перекрытия всего диапазона рабочих частот виброизоляторы выполняются с различными частотными характеристиками. Частота собственных колебаний нагруженного номинальной нагрузкой виброизолятора¹⁾ (вдоль основной оси) составляет 3 - 4 Гц для низкочастотных, 8 - 10 Гц для среднечастотных и 20 -25 Гц для высокочастотных виброизоляторов.

Климатические требования - сохранить работоспособность в различных эксплуатационных условиях. Виброизоляторы должны обеспечивать защиту аппаратуры при температуре окружающей среды от **+60** до **-60°С**, относительной влажности до **98%**, атмосферном давлении 5 ГПа, при действии морского тумана, инея, росы, пыли, плесневых грибов и

паров горюче-смазочных материалов.

Конструктивные требования - нормально работать при любой схеме нагружения, быть удобными в монтаже и креплении оборудования и удовлетворять условиям взаимозаменяемости, иметь малые массу и габаритные размеры, быть простыми в изготовлении. Они должны выдерживать воздействия вибрации, ударов и линейных нагрузок в соответствии с техническими условиями и иметь срок непрерывной работы не менее 2000 ч [5].

Конструкции виброизоляторов обязательно включают упругий элемент (или упругие элементы) определенной жесткости, обеспечивающий выполнение условия $\nu > \sqrt{2}$, и детали внешнего оформления, необходимые для крепления виброизолятора. В конструкцию виброизолятора входят детали или узлы, обеспечивающие демпфирование.

Упругий элемент выполняется обычно из резины или другого эластичного материала либо из пружинной стали или бериллиевой бронзы. Форма упругого элемента из резины может быть различной, а металлические упругие элементы выполняются в виде пружины (цилиндрической, конической, экспоненциальной), лепестков, троса, металлической структуры типа плетенки (путанки). Упругие элементы из резины работают на все виды деформаций, а металлические - на изгиб (лепестковые виброизоляторы), растяжение-сжатие (пружинные виброизоляторы), изгиб и кручение (тросовые виброизоляторы).

Рассеяние колебательной энергии (демпфирование) в виброизоляторах происходит за счет «внутреннего трения» в материале при деформации упругого элемента или специальных устройств, обеспечивающих воздушное (вязкое) или фрикционное (сухое) трение. При использовании демпфирующих устройств рассеяние колебательной энергии значительно больше, но конструкция прибора в целом при этом сложнее. Перспективны виброизоляторы, использующие в качестве упругого элемента полимеры с большим «внутренним трением».

В зависимости от типа упругого элемента и способа демпфирования виброизоляторы можно разделить на следующие четыре группы: резинометаллические; пружинные с воздушным демпфированием; пружинные с фрикционным демпфированием; цельнометаллические со структурным демпфированием.

К первой группе относятся виброизоляторы типа АП, АЧ, АР, АН, АКСС, ко второй - АД, к третьей - АФД, АПН, АПНМ, к четвертой - ДК, АРМ, АЦП.

В качестве примера ниже рассмотрены виброизоляторы, относящиеся к каждой из перечисленных групп.

Отметим, что виброизоляторы с упругим элементом из резины, как правило, конструктивно более просты, могут работать при всех видах деформаций, но обладают меньшей прочностью, подвержены старению, их характеристики существенно зависят от температуры. Виброизоляторы с упругим пружинным элементом имеют сложную конструкцию, более прочны и долговечны, обладают большей стабильностью при действии климатических факторов. Дадим краткую характеристику основных групп виброизоляторов.

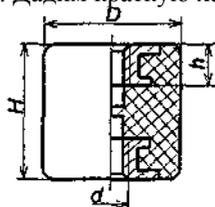
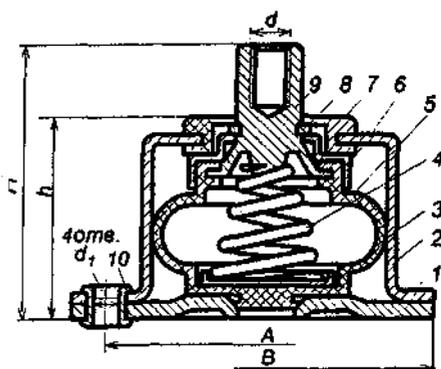


Рис. 18. Виброизолятор АН

Рис. 19. Виброизолятор АД.

- 1- основание; 2- корпус;*
- 3- подкладка;*
- 4- пружина; 5- баллон;*
- 6- крышка; 7- резиновое кольцо;*
- 8- опорное кольцо;*
- 9- бобышка; 10- поршень;*



Виброизоляторы АН («ножка») (рис. 18) работают на изгиб и на сжатие. Номинальная нагрузка на сжатие от 60 до 500 Н, на изгиб - вчетверо меньше. Собственная частота номинально нагруженного виброизолятора: в осевом направлении 11 ... 13 Гц, в поперечном 6 ... 8 Гц. Диапазон рабочих температур $-45 \dots +80 \text{ }^\circ\text{C}$. Виброзащита начинается с частоты 15 Гц при комнатной температуре и с частоты 40 Гц при температуре $10 \text{ }^\circ\text{C}$ и амплитуде вибрации 0,5 м. Основным недостатком виброизоляторов - их низкая вибропрочность.

Виброизолятор АД (рис. 19) имеет в качестве упругого элемента пружину экспоненциального профиля, обеспечивающую равночастотность¹⁾. Для демпфирования колебаний используется резиновый баллончик, скрепленный с фланцем, имеющим калиброванное отверстие. При деформации пружины воздух проходит через это отверстие, создавая сопротивление, примерно пропорциональное скорости движения. При низких температурах и малом давлении воздуха демпфирование осуществляется за счет сопротивления резины изгибу.

Виброизоляторы АД предназначены для нагрузок от 0,3 до 15 кг, действующих вдоль оси пружины. Собственная частота нагруженного номинальной нагрузкой виброизолятора 8-10 Гц. Виброзащита при нормальных условиях начинается с частоты 12 Гц при амплитуде вибрации до 0,5 - 1,5 мм (в зависимости от номера серии виброизолятора). Интервал

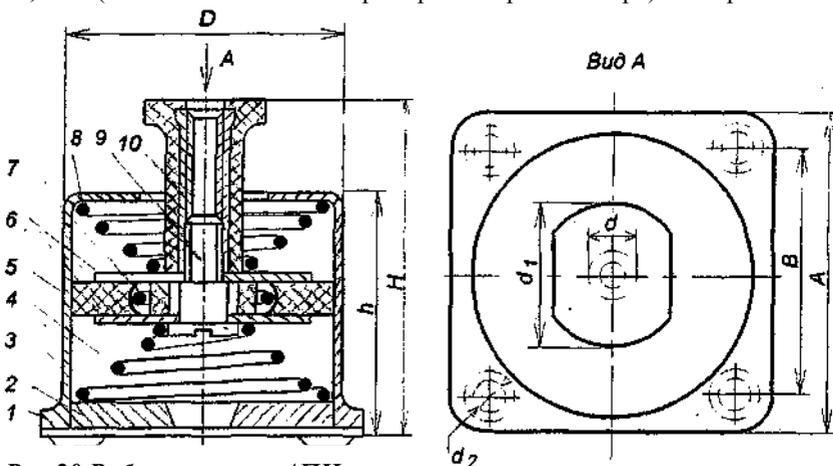


Рис.20 Виброизолятор АДН;

1 – основание; 2 – ограничитель; 3 – корпус; 4, 8 – пружины; 5 – фрикционные сухари; 6 – шайбы; 7 – распорное кольцо; 9 – винт; 10 – втулка

рабочих температур $-60 \dots +70 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициент демпфирования $\beta=0,06-0,12$ при $\beta=20^\circ\text{C}$ и достигает 0,5 при $t = -60 \text{ }^\circ\text{C}$. Виброизоляторы АД удовлетворительно работают при ударных нагрузках.

1) При действии статической нагрузки вдоль главной оси виброизолятора.

Виброизоляторы АПН (пространственного нагружения) (рис. 20) предназначены для работы при нагрузках, действующих как вдоль оси виброизолятора, так и в поперечном направлении или под углом. Упругий элемент виброизолятора состоит из двух конических пружин одинаковой жесткости и, следовательно, имеет симметричную характеристику. Профиль пружин обеспечивает равночастотность виброизолятора. Под нижней пружиной установлена сетчатая подушка - ограничитель ударных нагрузок.

Демпфирование колебаний осуществляется с помощью фрикционного демпфера. Продольные колебания демпфируются за счет трения сухарей демпфера о стенки корпуса виброизолятора, поперечные - за счет их трения об опорные шайбы. Максимальное демпфирование наблюдается на резонансных частотах (10-20 Гц) и соответствует значению $\beta = 0,4 - 0,5$. С увеличением частоты коэффициент демпфирования снижается, что благоприятно сказывается на виброизоляции в зарезонансной области (см. рис. 4).

Виброизоляторы АПН рассчитаны на нагрузки 10 - 15 Н, вибрацию любого направления в диапазоне частот 30 - 200 Гц при максимальном ускорении до **15g**, ударных ускорениях до **12g** и линейном ускорении вдоль оси виброизолятора до **15g, $t = -60 \dots +150^\circ\text{C}$** .

Цельнометаллические сетчатые виброизоляторы. Упругим элементом сетчатого виброизолятора АЦП является подушка, отформованная штамповкой из тонкой стальной спирали. Для навивки спирали используют легированную сталь (типа ЭИ 708 или 1Х18Н9Т) или бериллиевую бронзу, что обеспечивает работу виброизолятора в широком диапазоне температур и в условиях агрессивных сред. Конструкция виброизолятора зависит от формы упругого элемента.

Упругий элемент из сетки благодаря трению между проволочками при деформации обладает высокими демпфирующими свойствами, близкими к свойствам резины (поэтому материал получил условное наименование МР - металлическая резина). Виброизоляторы из МР имеют достаточно высокую ударную прочность. Основным недостатком виброизоляторов из МР является низкая стабильность характеристик вследствие усадки сетчатого элемента под нагрузкой. В связи с этим более рациональным считаются пружинно-сетчатые виброизоляторы, у которых основным несущим элементом является пружина, а сетчатая подушка - демпфирующим элементом.

СТАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТЫ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ

Статический расчет виброизоляторов. Включает задачи определения типоразмера виброизоляторов, их статической осадки и размеров нивелирующих прокладок.

Типоразмер виброизолятора определяется по его статической нагрузке. При заданной схеме расположения виброизоляторов их реакции на статическую весовую нагрузку находятся из условий статики. В системе с однонаправленным нагружением, например вдоль оси, эти условия суть следующие:

$$\sum_{i=1}^n P_i = G; \quad \sum_{i=1}^n P_i x_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_i y_i = 0, \quad (38)$$

где G - вес аппарата; P_i - реакция i -го виброизолятора n —число виброизоляторов; x_i, y_i - координаты точек их крепления.

При числе виброизоляторов, большем трех, система становится статически неопределимой, и для определения опорных реакций на них должны быть наложены $(n-3)$ дополнительных условий. Одним из таких условий обычно является следующее:

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i y_i = 0. \quad (39)$$

Это условие выражает равенство нулю центробежных моментов опорных реакций.

Могут быть также произвольно заданы $(n-3)$ опорных реакций, после чего остальные реакции находят из статического расчета (из уравнений (38)). Если значения всех реакций получаются положительными, то система виброизоляции рассчитана правильно.

В пространственных схемах нагружения должны быть определены составляющие опорных реакций P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} . Они должны удовлетворять шести уравнениям статики:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} &= G_x; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = G_y; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = G_z; \\ \sum_{i=1}^n (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i); \quad \sum_{i=1}^n (P_{iy} z_i - P_{iz} y_i); \\ \sum_{i=1}^n (P_{iz} x_i - P_{ix} z_i). \end{aligned} \quad (40)$$

В статически неопределимых системах для нахождения реакций должны быть наложены **(3n—6)** дополнительных условий. В системах, имеющих плоскости симметрии, такими условиями будут равенства реакций симметрично расположенных виброизоляторов. В табл. 9.1 приведены формулы расчета статических нагрузок для некоторых схем виброизоляции.

После определения опорных реакций выбирается типоразмер каждого из виброизоляторов и находится его статическая осадка по формуле $\delta_{ст} = P_i/k_i$. Если осадка разных виброизоляторов получается различной, то аппарат выравняется с помощью нивелирующих прокладок. Их размеры определяются как разность осадок по отношению к наименьшей из них.

В схемах с пространственным нагружением выравнивание производится в отношении каждой из трех осей каждого виброизолятора. При этом компенсация разности деформаций виброизоляторов в направлении их главной оси осуществляется с помощью прокладок, а в плоскости, перпендикулярной главной оси - посредством соответствующего смещения виброизоляторов в этой плоскости.

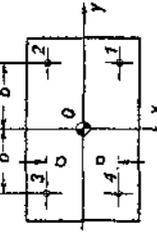
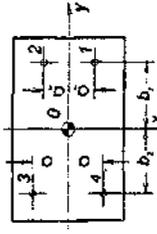
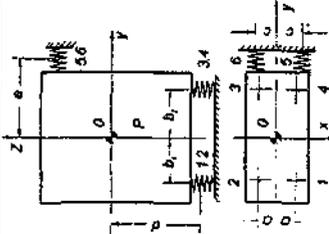
Как отмечалось выше, наиболее часто применяется установка аппаратов на виброизоляторах, расположенных на днище корпуса (или каркаса). При этом по соображениям прочности и жесткости корпуса виброизоляторы размещаются преимущественно симметрично, по углам днища, и их общий центр жесткости совпадает с геометрическим центром (в плане). Блоки небольшой массы могут монтироваться без специального корпуса на общей виброизоляционной платформе (раме), снабженной опорными виброизоляторами.

При произвольном размещении блоков внутри аппарата (или на виброизоляционной платформе) их общий центр масс в общем случае может не совпадать с вертикалью, проведенной через центр жесткости виброизоляторов. В таком случае нагрузки на отдельные виброизоляторы окажутся различными, а при возбуждении колебаний аппарата вдоль оси z будут возникать сложные пространственные формы колебаний, что ухудшает работу виброизоляторов.

Этот недостаток может быть устранен или ослаблен посредством рационального (с точки зрения механики) размещения блоков в аппарате или на виброизоляционной платформе. Условием такого размещения является

Таблица 9.1

Формулы для расчета статических нагрузок

Схема нагружения	Расположение точек крепления (в плане)	Дополнительные условия	Расчетные формулы для определения реакций
		$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$	$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{P}{4}$
		$P_1 = P_2;$ $P_3 = P_4$	$P_1 = P_2 = P \frac{b_2}{2(b_1 + b_2)};$ $P_3 = P_4 = P \frac{b_1}{2(b_1 + b_2)}$
Однонаправленная		$P_{1x} = P_{2x} = P_{3x} = P_{4x} =$ $= P_{5x} = P_{6x} = 0;$ $P_{1y} = P_{2y} = P_{3y} = P_{4y} =$ $= P_{5y} = P_{6y} = 0;$ $P_{1z} = P_{2z} = P_{3z} = P_{4z};$ $P_{5z} = P_{6z} = KP_{4z}$	$P_{1z} = P_{2z} = \frac{P(b_2 + Ke)}{2[b_1 + b_2 + K(b_1 + e)]};$ $P_{3z} = P_{4z} = \frac{Pb_1}{2[b_1 + b_2 + K(b_1 + e)]};$ $P_{5z} = P_{6z} = \frac{Pb_1K}{2[b_1 + b_2 + K(b_1 + e)]}$

минимальное отклонение проекции центра масс аппарата от точки, соответствующей центру жесткости виброизоляторов (рис. 21). Это условие может быть выражено уравнением

$$(x_y - x_0)^2 + (y_y - y_0)^2 = R^2, \quad (41)$$

где x_0, y_0 — координаты центра масс аппарата; x_0, y_0 — координаты центра жесткости; R — минимально допустимое отклонение центра масс (в плане) от центра жесткости.

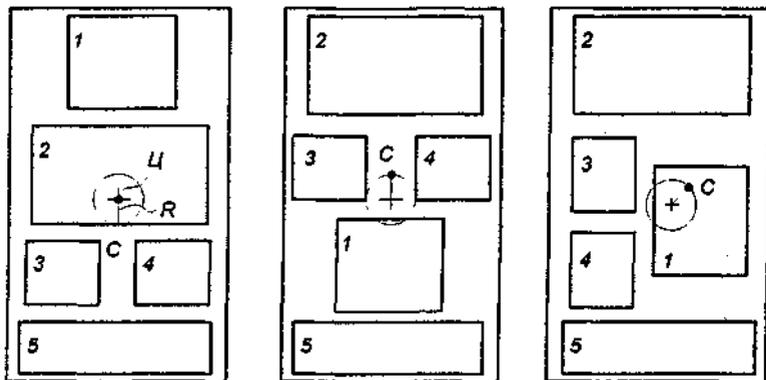


Рис. 21. Варианты размещения блоков в аппарате.

Координаты центра масс определяются из уравнении статических моментов масс блоков относительно выбранных осей координат:

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = m x_y; \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i = m y_y, \quad (42)$$

где n — число блоков; m_i — масса i -го блока; x_i, y_i — координаты центра масс i -го блока; m — общая масса всех блоков.

После определения центра масс все варианты размещения блоков сравниваются между собой с помощью (41). Наилучшим будет тот вариант, в котором отклонение R окажется наименьшим, лучше всего — близким к нулю.

Динамический расчет виброизоляторов. Включает определение собственных частот, максимальных смещений и ускорений виброизоляторов блока и оценку качества его виброизоляции в целом.

Максимальные смещения и ускорения определяются через соответствующие коэффициенты передачи при виброизоляции. Для определения возможных смещений и ускорений аппарата во всем диапазоне эксплуатационных частот необходимо построить соответствующие резонансные кривые. На основании анализа резонансных кривых делается вывод о качестве виброизоляции аппарата с помощью выбранной системы виброизоляции.

Пример 7. Подобрать виброизоляторы для аппарата со следующими данными: вес аппарата $G=25 \cdot 10 \text{ Н}$; габаритные размеры $A \times B \times H=40 \times 60 \times 50 \text{ см}$; диапазон возбуждающих частот $f=20 - 400 \text{ Гц}$; виброускорение $a_0 = 10g$; диапазон температур $t=-60...+80 \text{ }^\circ\text{C}$, влажность $B=98 \%$ при $t=40 \text{ }^\circ\text{C}$ в течение 48 ч.

Решение. Определим предварительно максимальную амплитуду возбуждающей вибрации. На низкочастотном участке диапазона $S_0=250 \text{ н}_z / f^2 = 6,25 \text{ мм}$.

Учитывая условия эксплуатации и амплитуду вибрации; выбираем виброизоляторы типа АПН. Исходя из конструктивных соображений, принимаем плоскую схему расположения с четырьмя виброизоляторами, с координатами в плане (рис. 22):

$$x_1 = -x_2 = 25 \text{ см}; y_1 = y_2 = 15 \text{ см}; x_3 = x_4 = 20 \text{ см}, -y_3 = -y_4 = 12 \text{ см}.$$

Статические нагрузки на виброизоляторы определим из уравнений

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = G;$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 = 0;$$

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 = 0.$$

Дополнительным условием будет симметричное размещение виброизоляторов относительно плоскости yo_z , вследствие чего $P_1 = P_2, P_3 = P_4$. В результате получим два уравнения

$$2P_1 + 2P_3 = G; P_1 y_1 - P_3 y_3 = 0,$$

откуда находим $P_1 = P_2 = 55,6 \text{ Н}, P_3 = P_4 = 69,4 \text{ Н}$.

По этим данным выбираем типоразмер виброизолятора АПН—4, его жесткость $k_z = 33 \text{ Н/мм}$. Определим статические осадки виброизоляторов $z_{1cm} = z_{2cm} = P_1 / k_z = 1,68 \text{ мм}, z_{3cm} = z_{4cm} = P_3 / k_z = 2,3 \text{ мм}$.

Толщина нивелирующих прокладок $z_{1cm} - z_{2cm} = 0,42 \text{ мм}$.

Собственная частота колебаний аппарата на виброизоляторах вдоль оси z (приближенно):

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k_z}{m}} = \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{4 \cdot 33 \cdot 10^4}{25}} = 11,5 \text{ Гц}$$

(для точного определения частоты f_3 необходимо учесть вращательное движение аппарата относительно оси z).

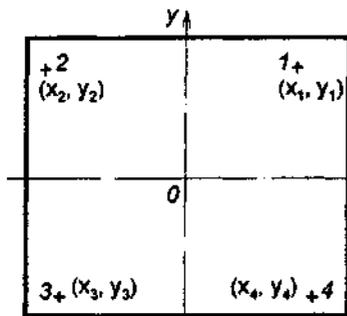


Рис. 22. Схема расположения виброизоляторов (в плане)

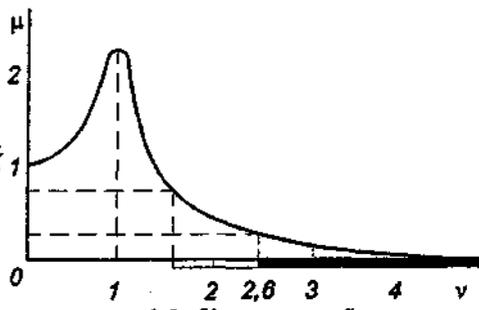


Рис. 23. К расчёту виброизоляции.

Максимальную амплитуду колебаний аппарата (на низкочастотном участке эксплуатационного диапазона частот) найдем по формуле $S_c = \mu S_a$; где

$$\mu = \sqrt{1 + \eta^2 \nu^2} / \sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2 \nu^2}.$$

Расчитав $\nu = f/f_3 = 30/11,5 = 2,6$ и приняв $\eta = 0,5$, находим: $\mu = 0,28$, $S_c = 1,75$ мм.

Максимальное ускорение $a_{max} = a_0 \mu = 10g \cdot 0,28 = 2,8g$. Это ускорение будет действовать на электрорадиоэлементы внутри аппарата.

Для определения качества виброизоляции на всем диапазоне эксплуатационных частот построим график зависимости $\mu = \mu(\nu)$, для чего рассчитаем ряд точек:

Таблица 9.2

Результаты расчета

ν	0	0,5	0,8	1,0	1,41	2	3	4
μ	1,0	1,30	2,0	2,24	1,0	0,45	0,22	0,16

Из графика (рис. 23) видно, что виброизоляция достигается во всем диапазоне эксплуатационных частот. На низкочастотном участке диапазона эффективность виброизоляции составляет $\mathcal{E} = (1 - \mu) \cdot 100 = 72\%$, что в большинстве случаев может быть признано достаточным. Для обеспечения лучшей виброизоляции в области низких частот следует применить более мягкие виброизоляторы.

Проверим выбранные виброизоляторы на действие ударной нагрузки. Пусть на систему действует синусоидальный ударный импульс с амплитудой и длительностью $\tau = 20$ мс. $H = 10g$

Подсчитаем максимальные значения смещения и ускорения аппарата. Собственная частота; аппарата $\omega_3 = 2\pi f_3 = 72,6 \text{ с}^{-1}$; условная частота импульса $\omega = \pi/\tau = 157 \text{ с}^{-1}$; частотное отношение $\omega/\omega_3 = 2,16$. Коэффициент

ударной перегрузки (2.38)

$$\mu_{\text{уд}} = \frac{2v}{v^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2v} = \frac{2 \cdot 2,16}{2,16^2 - 1} \cos \frac{\pi}{4,32} = 0,88$$

Амплитуда ускорения аппарата

$$S_{\text{max}} H \mu_{\text{уд}} = 10g \cdot 0,88 = 8,8g.$$

Амплитуда смещения

$$z_{\text{max}} = \frac{H \mu_{\text{уд}}}{\omega_3^2} = \frac{8,8 \cdot 9,81 \cdot 10^3}{72,6^2} = 16,35 \text{ мм.}$$

Из этих данных видно, что амплитуда смещения превышает конструктивный ход виброизолятора. В результате в конце движения произойдет удар штока виброизолятора об ограничитель хода и виброизоляция удара аппарата достигнута не будет. Расчет виброизолятора на удар длительностью $\tau=10$ мс показывает, что в этом случае цель будет достигнута: максимальное ускорение не превысит при максимальном смещении около 8 мм.

Для того чтобы достичь двукратного уменьшения ударного ускорения при длительности импульса $\tau=20$ мс, потребуются виброизоляторы с жесткостью менее 10

H/мм. При этом «просадка» виброизолятора при ударе составит около 35 мм. Это условие накладывает ограничение на выбор типа виброизолятора (могут быть, например, выбраны тросовые виброизоляторы). В компоновке аппарата на объекте должны быть предусмотрены меры, обеспечивающие возможные смещения.

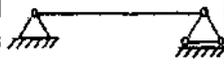
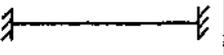
Некоторые сведения о характеристиках виброизоляторов даны в приложении (табл. П 8).

Физические параметры материалов

Материал	$E \cdot 10^{11},$ $\frac{H}{M^2}$	$\rho \cdot 10^3,$ $\frac{кг}{M^3}$	ν	$[\sigma] \cdot 10^8,$ $\frac{H}{M^2}$
Сталь	2 - 2,2	7,8	0,24 - 0,3	1,6
Алюминий	0,68	2,7	0,32 - 0,36	0,3 - 0,8
Медь	1,27	8,9	0,31 - 0,34	0,3 - 1,2
Серебро	0,82	10,5	---	---
Золото	0,78	19,3	---	---
Дюралюминий	0,72	2,7	---	0,8 - 1,5
Стеклотекстолит				
СТЭФ (H=1,33 мм)	0,33	2,47	0,279	---
СТЭ (H=1,22 мм)	0,35	1,98	0,14	---
НФД (H=0,92 мм)	0,345	2,32	0,238	---
СТЭФ (с печатной схемой, H=1,22 мм)	0,302	2,05	0,22	---
Текстолит	0,06 - 0,1	---	---	0,3 - 0,4
Гетинакс	0,1 - 0,17	---	---	0,5 - 0,7

Таблица П2

Значения параметров λ_i и коэффициентов $A_i, B_i, C_i,$ базисных функций

Условия закрепления	i	λ_i	A_i	B_i	C_i
	1	3,142	0	0	0
	2	6,283	0	0	0
	3	9,425	0	0	0
	4	12,566	0	0	0
	5	15,708	0	0	0
	1	4,730	-1,0178	-1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	-1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	-1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	-1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	-1	-1,0000001

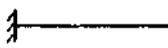
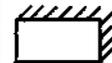
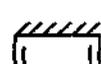
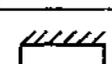
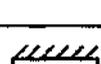
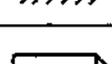
	1	4,730	-1,0178	1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	1	-1,0000001
	1	3,927	0	0,027875	0
	2	7,069	0	-0,0012041	0
	3	10,210	0	0,0000520	0
	4	13,352	0	-0,0000022	0
	5	16,494	0	0,0000001	0
	1	1,875	-1,3622	-1	1,3622
	2	4,694	-0,98187	-1	0,98187
	3	7,855	-1,000777	-1	1,000777
	4	10,996	-0,999965	-1	0,999965
	5	14,137	-1,0000015	-1	1,0000015

Таблица П3

Частотный коэффициент

Эскизы	α	Эскизы	α
	$9.87 \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$		$3.52 \sqrt{1 + 2.48 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	$9.87 \sqrt{1 + 2.33 \frac{a^2}{b^2} + 2.44 \frac{a^4}{b^4}}$		22.37
	$15.42 \sqrt{1 + 0.95 \frac{a^2}{b^2} + 0.41 \frac{a^4}{b^4}}$		$22.37 \frac{a^2}{b^2}$
	$9.87 \sqrt{1 + 2.57 \frac{a^2}{b^2} + 5.14 \frac{a^4}{b^4}}$		3.52
	$22.37 \sqrt{1 + 0.48 \frac{a^2}{b^2} + 0.19 \frac{a^4}{b^4}}$		$3,52 \frac{a^2}{b^2}$

Эскизы	α	Эскизы	α
	$15.42 \sqrt{1 + 1.11 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		15.42
	$22.37 \sqrt{1 + 0.57 \frac{a^2}{b^2} + 0.47 \frac{a^4}{b^4}}$		$15.42 \frac{a^2}{b^2}$
	$22.37 \sqrt{1 + 0.61 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		$3.52 \sqrt{1 + 5.56 \frac{a^2}{b^2} + 19.2 \frac{a^4}{b^4}}$
	$22.37 \sqrt{1 + 0.61 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		$15.42 \sqrt{1 + 0.29 \frac{a^2}{b^2} + 0.05 \frac{a^4}{b^4}}$
	$3.52 \frac{a}{b}$		$3.52 \sqrt{1 + 1.58 \frac{a^2}{b^2}}$
	$9.87 \frac{a^2}{b^2}$		$3.52 \sqrt{1.58 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	9.87		$22.37 \sqrt{0.1 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	$9.87 \sqrt{0.43 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		$22.37 \sqrt{1 + 0.1 \frac{a^2}{b^2}}$
	$9.87 \sqrt{1 + 0.43 \frac{a^2}{b^2}}$		$15.42 \sqrt{0.34 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	$3.52 \sqrt{1 + 5.97 \frac{a^2}{b^2} + 40.5 \frac{a^4}{b^4}}$		$15.42 \sqrt{1 + 0.34 \frac{a^2}{b^2}}$
	$22.37 \sqrt{1 + 0.14 \frac{a^2}{b^2} + 0.02 \frac{a^4}{b^4}}$		a - длинная сторона b - короткая сторона

Таблица П 8

Технические характеристики некоторых виброизоляторов

Тип виброизолятора	Номинальная нагрузка, Н	Прогиб, мм	Коэффициент жесткости, Н/мм		Масса, кг
			K_y	K_x	
Резинометаллические стержневые					
АН-6	60	1,6-0,4 (для всех видов)	40	9,3	0,012
АН-10	100		65	15	0,012
АН-15	150		95	25	0,038
АН-30	300		185	46	0,038
АН-50	500		310	80	0,046
Резинометаллические пластинчатые					
АП-1-0.45	4.5	-	2,5	10	от 0,007 до 0,008
АП-1-1.80	18	-	11,5	22.8	-
АП-2-2.70	27	-	17,2	34.2	от 0,007 до 0,008
АП-2-4.50	45	-	28,6	60	-
АП-3-9	90	-	57	140	от 0,007 до 0,008
АП-3-11.35	112.5	-	70	160	-
Резинометаллические судовые со страховкой					
АКСС-10	100	0,8	120	110	0,172
АКСС-15	150	0,8	170	150	0,213
АКСС-25	250	0,9	280	250	0,213
АКСС-30	600	1,1	430	380	0,702
АКСС-85	850	1,4	610	540	1,155
АКСС-120	1200	1,3	920	830	1,57
Пружинные с воздушным демпфированием					
АД-0.6	3,0-6,12	2,5-5,5	1,2	-	-
АД-1.5	10,2-15,3	5,5-7,5	2	-	-
АД-3	15,3-30,6	4,0-7,0	4	-	-
АД-5	30,6-51,0	5,0-7,5	7	-	-
АД-10	71,4-102	5,5-7,5	12	-	-
АД-15	102-152	5,5-8,0	19	-	-
Пружинные с фрикционным демпфированием					
АПН-1	5-10	-	6,8	-	0,041
АПН-2	9,8-24,5	-	13,7	-	0,074
АПН-3	19,6-49	-	22,5	-	0,079
АПН-4	39,2-68,7	-	32,3	-	0,126
АПН-5	58,9-98,1	-	49	-	0,135
АПН-6	88,3-147,2	-	58,8	-	0,225

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Токарев М.Ф., Тал ицкий Е.Н., Фролов В.А. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.А.Фролова. — М.: Радио и связь, 1984. — 224 с.
2. Вибрации в технике: Справ.: В 6 т. / Ред. совет: В.Н.Челомей (пред.), — М.: Машиностроение, 1978 — 1981.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. — М.: Наука, 1968. — 560 с.
4. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. 3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние), 1976.—320 с.
5. Ильинский В.С. Защита РЭА и прецизионного оборудования от динамических воздействий. — М.: Радио и связь, 1982. — 296 с.
6. Маквцов Е.Н., Тартаковский А.М. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: Учеб. для вузов. - М.: Радио и связь, 1993.-200с:
7. Маквцов Е.Н., Тартаковский А.М. Дискретные модели приборов. — М.: Машиностроение, 1982. - 136 с.
8. Steinberg D.S. Vibrations analysis for electronic equipment. — New York, 1973. - 456p.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле.— М.: Наука. 1967. — 444 с.
10. Прочность, устойчивость, колебания. Справ, в 3-х т.- Под ред. И.А.Биргера, Я.Г.Пановко.—М.: Машиностроение, 1968. т.3 - 568с.
11. Г. Виброзащита радиоэлектронной аппаратуры полимерными компаундами / Ю.В.Зеленев, А.А.Кирилин, Э.Б.Слободник, Е.Н.Талицкий; Под ред. Ю.В.Зеленева. — М.: Радио и связь, 1984. — 120 с.
12. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. - 488 с.
13. Случайные колебания: Пер. с англ. / Под ред. А.А.Первозванцева. — М.: Мир, 1967. — 356 с.
14. Карпушин В.Б. Виброшумы радиоаппаратуры. — М.: Сов. радио, 1-977. - 320 с.
15. Справочник конструктора РЭА: Общие принципы конструирования / Под ред. Р.Г. Варламова. — М.: Сов. радио, 1980. — 480 с.
16. Талицкий Е.Н. Защита РЭА от механических воздействий: Уменьшение резонансных колебаний: Учеб. пособие. — Владимир: Владим. политехи, ин-т, 1979. - 90 с.
17. Талицкий Е.Н. Виброзащита РЭС полимерными демпферами: Учеб. пособие. — Владимир: Владим. политех, ин-т, 1993. — 86 с.

- 17.Талицкий Е.Н. Расчет вибро-, ударопрочности и устойчивости конструкций электронных средств: Учеб. пособ. — Владимир: Владим. гос. ун-т, 1998. —58 с.
- 18.Чеканов А.Н. Вероятностные расчеты и оптимизация несущих конструкций: Учеб. пособие. — М.: ИЧП "Издательство магистр", 1997. -134 с.'
- 19.Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справ. — Киев: Наук, думка, 1971. —376 с.
- 20.Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. — М.: Машиностроение, 1970. — 734 с.
- 21.Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
- 22.Ковалев Н.А. Прикладная механика: Учеб. для вузов. — М.: Высш. шк., 1972 —400с.
- 23.Каленкович Н.И., Фастовец Е.П., Шамгин Ю.В. Механические воздействия и защита радиоэлектронных средств: Учеб. пособие' для вузов. — Минск: Высш. шк., 1989. — 244с.
- 24.Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара: Справ, в 2 кн. / Под ред. В.В.Клюева. — М.: Машиностроение, 1978.
- 25.Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. —336с. *
- 26.Никифоров А.С. Вибропоглощение на судах. — Л.: Судостроение, 1979.—184с.
- 27.Перепечко И.И. Акустические методы исследования полимеров. —М.: Химия, 1973. —296с.
- 28.Рощин Г.И. Несущие конструкции и механизмы РЭА. — М.: Высш. школа, 1981. — 375с.
- 29.Ruzicka J.E. Vibration control: Application. Electro-Technology. — 1964. vol.1, N 73, p.75-82.
- 30.ОСТ 4Г 0.010.009-84. Модули электронные первого и второго уровней радиоэлектронных средств. Конструирование.
- 31.Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. —Киев.: Наук, думка, 1988. — 536 с.
- 32.Суровцев Ю.А. Амортизация радиоэлектронной аппаратуры. - М.: Сов. " радио, 1974.-176 с.
- 33.Трудоношин В.А., Пивоваров Н.В. Математические модели технических объектов: Учеб. пособие для втузов / Под ред. И.П. Норенкова. - М.: Высш. шк., 1986. — 160 с.
34. Секулович М. Метод конечных элементов /Пер. с серо/Ю.Н. Зуева; Под ред. В.Ш. Барбакадзе. - М.: Стройиздат, 1993. - 664 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения.....	2
Введение.....	4
Колебания систем с одной степенью свободы.....	5
Свободные изгибные колебания конструкций типа пластин.....	11
Частотная отстройка как способ борьбы с резонансными колебаниям.....	27
Основные механизмы и характеристики демпфирования	Типы
виброизоляторов	30
Статический и динамический расчёты виброизоляторов.....	36
Приложение.....	43
Список литературы	47

